4.11 משפט -

יהי אולטרה-פילטר אידמפוטנטי על ℕ,  
אזי לכל  *הינו IP-set.*

*הוכחה:*

*יהי .*

*נגדיר*

היות ו מקיים אזי אם מתקיים .

נבנה רקורסיבית:

* שרשרת של קבוצות
* סדרה עולה: כאשר , כך ש .

נתחיל עם .

היות ו *. קיים . מהגדרת נובע כי ולכן אם נבחר  
 מתקיים:* . והקבוצה הינה אינסופית(\*) . לכן ניתן לבחור כך שמתקיים .

באופן כללי בהינתן וכן *, לפי ההגדרה מתקיים שהקבוצה ולכן וכן כמקודם ולכן גם*  אינסופי, ולכן נבחר כך ש .

נטען את הטענה הבאה:

יהי טבעי  
ותהיינה

*אזי*

נוכיח זאת באינדוקציה על .

היות ומתקיים אזי עבור מתקיים הטענה.

נניח נכונות עבור וכן . ולכן הסכום ה *מקיים:*

*והיות ו- נקבל כי הסכום ה-r . ולכן* מתקיים. והוכחנו את הטענה.

מכל האמור קיבלנו כי קבוצת הסכומים של  *מקיים* כדרוש.